ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.925

СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СТЕПЕНИ n И m

Е.Е. КУЛЕШ, В.М. ПЕЦЕВИЧ

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,,
г. Гродно, Республика Беларусь

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &(x' - a_0 - a_1 x - a_2 y)^n = a_3 x + a_4 y + a_5, \\ &(y' - b_0 - b_1 x - b_2 y)^m = b_3 x + b_4 y + b_5, \end{aligned} \tag{1}$$

где $|a_3| + |a_4| + |b_3| + |b_4| \neq 0$, a_i, b_i $i = \overline{0,5}$ - аналитические по t функции, $m, n \in N$.

Найдем необходимые и достаточные условия, при которых система (1) имеет свойство Пенлеве. В случае $n = m \geq 2$ такая задача решена в [1, 2]. Поэтому будем считать, что $n > m > 2$.

Основной результат

1. Пусть $\Delta = a_3 b_4 - a_4 b_3 \neq 0$. Тогда, выполнив в (1) линейное преобразование

$$(x, y) \to \left(x + \frac{a_4 b_5 - a_5 b_4}{\Delta}, y + \frac{a_5 b_3 - a_3 b_5}{\Delta} \right),$$

правой части, имеем

$$a_3\left(x + \frac{a_4 b_5 - a_5 b_4}{\Delta} \right) + a_4\left(y + \frac{a_5 b_3 - a_3 b_5}{\Delta} \right) + a_5 = a_3 x + a_4 y,$$

$$b_3\left(x + \frac{a_4 b_5 - a_5 b_4}{\Delta} \right) + b_4\left(y + \frac{a_5 b_3 - a_3 b_5}{\Delta} \right) + b_5 = b_3 x + b_4 y.$$

Таким образом, получим систему того же вида, в которой свободные коэффициенты правых частей тождественно равны нулю. Поэтому в рассматриваемом случае можем считать, что $a_5 = b_5 = 0$, т.е. система (1) примет вид

$$\begin{aligned} &(x' - a_0 - a_1 x - a_2 y)^n = a_3 x + a_4 y, \\ &(y' - b_0 - b_1 x - b_2 y)^m = b_3 x + b_4 y. \end{aligned} \tag{2}$$

Полагая в (2) $a_3 x + a_4 y = u^n$, $b_3 x + b_4 y = v^m$, получим систему вида

$$\begin{aligned} &u^{n-1} u' = \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 u^n + \alpha_4 v^m, \\ &v^{m-1} v' = \beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 u^n + \beta_4 v^m, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\alpha_0 = \dfrac{a_0a_3 + b_0a_4}{n}$, $\alpha_1 = \dfrac{a_3E_1}{n}$, $E_1 = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, $i^2 = -1$, $\alpha_2 = \dfrac{a_4E_2}{n}$, $E_2 = e^{i\frac{2\pi k}{m}}$,

$\alpha_3 = \dfrac{b_4a_3' - b_3a_4' + a_3(a_1b_4 - a_2b_3) + a_4(b_1b_4 - b_2b_3)}{n \cdot \Delta}$, $\beta_0 = \dfrac{b_0b_4 + a_0b_3}{m}$, $\beta_1 = \dfrac{b_3E_1}{m}$,

$\alpha_4 = \dfrac{a_3a_4' - a_4a_3' + a_3(a_2a_3 - a_1a_4) + a_4(b_2a_3 - b_1a_4)}{n \cdot \Delta}$, $\beta_2 = \dfrac{b_4E_2}{m}$,

$\beta_3 = \dfrac{b_4b_3' - b_3b_4' + b_3(a_1b_4 - a_2b_3) + b_4(b_1b_4 - b_2b_3)}{m \cdot \Delta}$,

$\beta_4 = \dfrac{b_3(a_2a_3 - a_1a_4) + b_4(b_2a_3 - b_1a_4) + a_3b_4' - a_4b_3'}{m \cdot \Delta}$.

Вводя в систему (3) параметр ε по формулам

$u = \varepsilon^p U$, $v = \varepsilon^q V$, $t = t_0 + \varepsilon^r \tau$,

будем иметь

$$\begin{aligned} U^{n-1}\dot{U} &= \alpha_0\varepsilon^{r-pn} + \alpha_1\varepsilon^{r+p-pn}U + \alpha_2\varepsilon^{r+q-pn}V + \alpha_3\varepsilon^r U^n + \alpha_4\varepsilon^{r+qm-pn}V^m, \\ V^{m-1}\dot{V} &= \beta_0\varepsilon^{r-qm} + \beta_1\varepsilon^{r+p-qm}U + \beta_2\varepsilon^{r+q-qm}V + \beta_3\varepsilon^{r+pn-qm}U^n + \beta_4\varepsilon^r V^m. \end{aligned} \tag{4}$$

Считая $p = m$, $q = n$, $r = mn$, при $\varepsilon = 0$ получим упрощенную в смысле Пенлеве систему

$U^{n-1}\dot{U} = \alpha_0$, $V^{m-1}\dot{V} = \beta_0$,

где $\alpha_0 = \alpha_0(t_0)$, $\beta_0 = \beta_0(t_0)$.

Интегрируя ее, найдем

$U = \left(n\alpha_0(\tau - \tau_0)\right)^{\frac{1}{n}}$, $V = \left(m\beta_0(\tau - \tau_1)\right)^{\frac{1}{m}}$,

где τ_0, τ_1 – произвольные постоянные.

Следовательно, для отсутствия подвижных особенностей в решениях системы (3) необходимо, чтобы $\alpha_0(t_0) = 0$, $\beta_0(t_0) = 0$. Поскольку t_0 – произвольная точка, не являющаяся особой для коэффициентов системы (3), то $b_0a_4 + a_0a_3 = 0$ и $b_0b_4 + a_0b_3 = 0$. Откуда, в силу $\Delta \neq 0$, имеем $a_0 = b_0 = 0$.

С учетом полученных ограничений системы (3) и (4) примут соответственно вид

$$\begin{aligned} u^{n-1}u' &= \alpha_1u + \alpha_2v + \alpha_3u^n + \alpha_4v^m, \\ v^{m-1}v' &= \beta_1u + \beta_2v + \beta_3u^n + \beta_4v^m, \end{aligned} \tag{5}$$

и

$$\begin{aligned} U^{n-1}\dot{U} &= \alpha_1\varepsilon^{r+p-pn}U + \alpha_2\varepsilon^{r+q-pn}V + \alpha_3\varepsilon^r U^n + \alpha_4\varepsilon^{r+qm-pn}V^m, \\ V^{m-1}\dot{V} &= \beta_1\varepsilon^{r+p-qm}U + \beta_2\varepsilon^{r+q-qm}V + \beta_3\varepsilon^{r+pn-qm}U^n + \beta_4\varepsilon^r V^m. \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим случаи. Полагая в (6) $p=1$, $q=0$, $r=n$ при $\varepsilon=0$ получим упрощенную систему

$$U^{n-1}\dot{U}=\alpha_2 V+\alpha_4 V^m,\ V^{m-1}\dot{V}=0,$$

для однозначности решений которой необходимо требовать $\alpha_2=\alpha_4=0$.

Полагая теперь в (6) $p=0$, $q=1$, $r=m$ при $\varepsilon=0$ получим упрощенную систему

$$U^{n-1}\dot{U}=0,\ V^{m-1}\dot{V}=\beta_1 U+\beta_3 U^n,$$

которая имеет однозначные решения только если $\beta_1=\beta_3=0$.

Отсюда следует, что в случае $\Delta\neq 0$ для наличия свойства Пенлеве у системы (2) необходимо требовать

$$a_2=a_4=b_1=b_3=0, \tag{7}$$

и система (5) при этом примет вид

$$u^{n-1}u'=\alpha_1 u+\alpha_3 u^n,\ v^{m-1}v'=\beta_2 v+\beta_4 v^m.$$

Последняя система обладает свойством Пенлеве в том и только том случае, если $\alpha_1=0$, $\beta_2=0$, откуда

$$a_3=b_4=0. \tag{8}$$

Но наличие условий (7) и (8) противоречит случаю $\Delta=a_3b_4-a_4b_3\neq 0$. То есть при $\Delta\neq 0$ систем вида (1) со свойством Пенлеве нет.

Итак, справедлива

Теорема 3.1. *Система (1) при* $\Delta=a_3b_4-a_4b_3\neq 0$ *имеет подвижные критические особые точки.*

2. Пусть $\Delta=a_3b_4-a_4b_3=0$.

2.1. Если $a_3\neq 0$, то выполнив в (1) линейное преобразование $x\to x-\dfrac{a_5}{a_3}$, получим

$$\begin{aligned}&(x'-\varphi_0-a_1x-a_2y)^n=a_3x+a_4y,\\&(y'-\psi_0-b_1x-b_2y)^m=\frac{b_3}{a_3}(a_3x+a_4y)+\psi_5,\end{aligned} \tag{9}$$

где $\varphi_0=a_0-\dfrac{a_1a_5}{a_3}+\left(\dfrac{a_5}{a_3}\right)'$, $\psi_0=b_0-\dfrac{b_1a_5}{a_3}$, $\psi_5=b_5-\dfrac{b_3a_5}{a_3}$.

Пусть $b_3\neq 0$, тогда выполнив в (9) замену переменных по формулам

$$\frac{b_3}{a_3}(a_3x+a_4y)+\psi_5=u^m,\quad y=w,$$

получим систему

$$\begin{aligned}&\left(mu^{m-1}u'+\alpha_0+\alpha_1u+\alpha_2w+\alpha_3u^m\right)^n=a_3b_3^{n-1}\left(u^m-\psi_5\right),\\&w'=\beta_0+\beta_1u+\beta_2w+\beta_3u^m,\end{aligned} \tag{10}$$

где $\alpha_0 = -\psi_5' - \dfrac{b_3}{a_3} a_4\left(\psi_0 - \dfrac{b_1\psi_5}{b_3}\right) + \dfrac{b_3'\psi_5}{b_3} - \varphi_0 b_3 + a_1\psi_5$, $\alpha_1 = -\dfrac{b_3}{a_3} a_4 E$, $E = e^{i\frac{2\pi k}{m}}$, $i^2 = -1$,

$k = \overline{0, m-1}$, $\alpha_2 = \left(\dfrac{a_4 b_3}{a_3}\right)' - \dfrac{a_4 b_3}{a_3}\left(b_2 - \dfrac{a_4 b_1}{a_3}\right) + \dfrac{b_3' a_4}{a_3} + \dfrac{a_1 a_4 b_3}{a_3} - a_2 b_3$, $\alpha_3 = -\dfrac{b_1 a_4}{a_3} - \dfrac{b_3'}{b_3} - a_1$,

$\beta_0 = \psi_0 - \dfrac{b_1\psi_5}{b_3}$, $\beta_1 = E$, $\beta_2 = b_2 - \dfrac{b_1 a_4}{a_3}$, $\beta_3 = \dfrac{b_1}{b_3}$.

Введем в (10) параметр ε по формулам

$$u = \varepsilon^p U, w = \varepsilon^q W, t = t_0 + \varepsilon^r \tau .$$

Получим

$$\begin{aligned} &\left(mU^{m-1}\dot{U} + \alpha_0\varepsilon^{r-pm} + \alpha_1 U\varepsilon^{r+p-pm} + \alpha_2 W\varepsilon^{q+r-pm} + \alpha_3 U^m\varepsilon^r\right)^n = a_3 b_3^{n-1}\left(U^m\varepsilon^{mp} - \psi_5\right)\varepsilon^{n(r-pm)}, \\ &\dot{W} = \beta_0\varepsilon^{r-q} + \beta_1 U\varepsilon^{p+r-q} + \beta_2 W\varepsilon^r + \beta_3 U^m\varepsilon^{mp+r-q}. \end{aligned} \tag{11}$$

Считая $p = 1$, $q = 0$, $r = m$, при $\varepsilon = 0$ имеем упрощенную систему

$$\left(mU^{m-1}\dot{U} + \alpha_0 + \alpha_2 W\right)^n = -a_3 b_3^{\,n-1}\psi_5, \quad \dot{W} = 0,$$

где $\alpha_0 = \alpha_0(t_0)$, $\alpha_2 = \alpha_2(t_0)$, $a_3 = a_3(t_0)$, $b_3 = b_3(t_0)$, $\psi_5 = \psi_5(t_0)$.

Так как по предположению $a_3 \cdot b_3 \neq 0$, то для однозначности решений последней системы необходимо требовать, чтобы $\alpha_0 = \alpha_2 = \psi_5 = 0$. Тогда считая в (11) $p = n$, $q = 1$, $r = m(n-1)$, при $\varepsilon = 0$ получим (т.к. $n > m$)

$$\left(mU^{m-1}\dot{U}\right)^n = a_3 b_3^{n-1} U^m, \quad \dot{W} = 0.$$

Так как по предположению $a_3 \cdot b_3 \neq 0$, то полученная система не обладает свойством Пенлеве.

Если $b_3 = 0$, то система (9) примет вид

$$\begin{aligned} &(x' - \varphi_0 - a_1 x - a_2 y)^n = a_3 x + a_4 y, \\ &(y' - \psi_0 - b_1 x - b_2 y)^m = \psi_5. \end{aligned} \tag{12}$$

Полагая в (12) $a_3 x + a_4 y = u^n$, $y = v$, получим систему

$$\begin{aligned} &nu^{n-1}u' = \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 u^n, \\ &v' = \beta_0 + \beta_2 v + \beta_3 u^n, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\alpha_0 = \varphi_0 a_3 + a_4\left(\psi_0 + \sqrt[m]{\psi_5}\right)$, $\alpha_1 = E a_3$, $E = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, $i^2 = -1$, $k = \overline{0, n-1}$, $\beta_0 = \psi_0 + \sqrt[m]{\psi_5}$,

$\alpha_2 = a_2 a_3 - a_1 a_4 + a_4\left(b_2 - \dfrac{b_1 a_4}{a_3}\right) + a_3\left(\dfrac{a_4}{a_3}\right)'$, $\alpha_3 = a_1 + \dfrac{a_4 b_1}{a_3} + \dfrac{a_3'}{a_3}$, $\beta_2 = b_2 - \dfrac{b_1 a_4}{a_3}$, $\beta_3 = \dfrac{b_1}{a_3}$.

В (13) введем параметр ε по формулам $u=\varepsilon^{p}U$, $v=\varepsilon^{q}V$, $t=t_0+\varepsilon^{r}\tau$. Получим

$$nU^{n-1}\dot{U}=\alpha_0\varepsilon^{r-pn}+\alpha_1U\varepsilon^{r+p-pn}+\alpha_2V\varepsilon^{q+r-pn}+\alpha_3U^{n}\varepsilon^{r},$$
$$\dot{V}=\beta_0\varepsilon^{r-q}+\beta_2V\varepsilon^{r}+\beta_3U^{n}\varepsilon^{r-q+np}. \qquad (14)$$

Считая $p=1$, $q=0$, $r=n$, при $\varepsilon=0$ имеем упрощенную систему

$$nU^{n-1}\dot{U}=\alpha_0+\alpha_2V,\quad \dot{V}=0,$$

для однозначности решений которой необходимо требовать $\alpha_0=\alpha_2=0$.

Тогда полагая в (14) $p=1$, $q=0$, $r=n-1$, при $\varepsilon=0$ имеем

$nU^{n-1}\dot{U}=\alpha_1U,\quad \dot{V}=0.$

Решения системы однозначны только если $\alpha_1=0$, что не может быть выполнено при предположении $a_3\neq 0$.

2.2. Пусть $a_3=0$, $a_4\neq 0$.

Поскольку $\Delta=0$, $a_3=0$, $a_4\neq 0$, то $b_3=0$ и система (1) примет вид

$$(x'-a_0-a_1x-a_2y)^{n}=a_4y+a_5,$$
$$(y'-b_0-b_1x-b_2y)^{m}=b_4y+b_5. \qquad (15)$$

Выполнив в (15) линейное преобразование $y\to y-\dfrac{a_5}{a_4}$, получим

$$\left(x'-\varphi_0-a_1x-a_2y\right)^{n}=a_4y,$$
$$\left(y'-\psi_0-b_1x-b_2y\right)^{m}=b_4y+\psi_5, \qquad (16)$$

где $\varphi_0=a_0-\dfrac{a_2a_5}{a_4}$, $\psi_0=b_0+\left(\dfrac{a_5}{a_4}\right)'-\dfrac{a_5b_2}{a_4}$, $\psi_5=b_5-\dfrac{a_5b_4}{a_4}$.

Полагая в (16) $y=u^{n}$, $x=v$, имеем систему

$$v'=\varphi_0+\sqrt[n]{a_4}\,u+a_1v+a_2u^{n},$$
$$\left(nu^{n-1}u'-\psi_0-b_1v-b_2u^{n}\right)^{m}=b_4u^{n}+\psi_5. \qquad (17)$$

Введем параметр ε по формулам $u=\varepsilon U$, $v=V$, $t=t_0+\varepsilon^{n}\tau$. Тогда при $\varepsilon=0$ получим

$$\dot{V}=0,\ \left(nU^{n-1}\dot{U}-\psi_0-b_1V\right)^{m}=\psi_5.$$

Для однозначности решений последней системы необходимо требовать $\psi_0=b_1=\psi_5=0$. Тогда система (17) примет вид

$$v'=\varphi_0+\sqrt[n]{a_4}\,u+a_1v+a_2u^{n},\ \left(nu'-b_2u\right)^{m}=\frac{b_4}{u^{n(m-1)-m}}. \qquad (18)$$

Так как $m > 2$, т.е. $m-1>1$ и $n>m$, то умножив полученные неравенства, получим $n(m-1)>m$, а значит, $n(m-1)-m>0$. Т.е. для отсутствия подвижных критических особых точек в решениях системы (18) необходимо требовать, чтобы $b_4=0$. Следовательно (18) примет вид

$$v' = \varphi_0 + \sqrt[n]{a_4}u + a_1 v + a_2 u^n,\ nu' - b_2 u = 0,$$

решения которой обладают Р-свойством. Итак, для того, чтобы система (1) обладала свойством Пенлеве в рассматриваемом случае, необходимо и достаточно, чтобы $b_3=0$, $a_3=0$, $a_4\neq 0$, $\psi_0=0$, $b_1=0$, $\psi_5=0$, $b_4=0$.

2.3. Пусть $a_3=a_4=0$, $b_4\neq 0$. Тогда (1) примет вид

$$(x' - a_0 - a_1 x - a_2 y)^n = a_5,$$
$$(y' - b_0 - b_1 x - b_2 y)^m = b_3 x + b_4 y + b_5.$$

Выполнив линейное преобразование $y \to y - \dfrac{b_5}{b_4}$, получим систему

$$\left(x' - \varphi_0 - a_1 x - a_2 y\right)^n = a_5,\ \left(y' - \psi_0 - b_1 x - b_2 y\right)^m = b_3 x + b_4 y,$$

где $\varphi_0 = a_0 - \dfrac{a_2 b_5}{b_4}$, $\psi_0 = b_0 + \left(\dfrac{b_5}{b_4}\right)' - \dfrac{b_2 b_5}{b_4}$.

Положив $b_3 x + b_4 y = u^m$, $x = v$, имеем

$$v' = \beta_0 + \beta_2 v + \beta_3 u^m,\ mu^{m-1}u' = \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 u^m,$$

где $\beta_0 = \varphi_0 + \sqrt[n]{a_5}$, $\beta_1 = a_1 - \dfrac{a_2 b_3}{b_4}$, $\beta_3 = \dfrac{a_2}{b_4}$, $\alpha_0 = \psi_0 b_4 + b_3\left(\varphi_0 + \sqrt[n]{a_5}\right)$, $\alpha_1 = b_4 E$, $E = e^{i\frac{2\pi k}{m}}$, $i^2=-1$, $k=\overline{0,m-1}$, $\alpha_2 = b_3' + a_1 b_3 + b_1 b_4 - b_2 b_3 - \dfrac{a_2 b_3^2}{b_4} - \dfrac{b_3 b_4'}{b_4}$, $\alpha_3 = \dfrac{a_2 b_3}{b_4} + \dfrac{b_4'}{b_4} + b_2$.

Используя результаты исследования системы (13), получаем, что необходимо требовать $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=0$. Но условие $\alpha_1=0$ равносильно $b_4=0$, что невозможно в данном предположении.

2.4. Пусть $a_3=a_4=b_4=0$, $b_3\neq 0$. Тогда (1) примет вид

$$(x' - a_0 - a_1 x - a_2 y)^n = a_5,$$
$$(y' - b_0 - b_1 x - b_2 y)^m = b_3 x + b_5.$$

Выполним преобразование $x \to x - \dfrac{b_5}{b_3}$ получим

$$\left(x' - \varphi_0 - a_1 x - a_2 y\right)^n = a_5,\ \left(y' - \psi_0 - b_1 x - b_2 y\right)^m = b_3 x,$$

где $\varphi_0 = a_0 + \left(\dfrac{b_5}{b_3}\right)' - \dfrac{a_1 b_5}{b_3}$, $\psi_0 = b_0 - \dfrac{b_1 b_5}{b_3}$.

Полагая $x=u^m$, $y=v$, имеем

$$mu^{m-1}u' = \varphi_0 + \sqrt[n]{a_5} + a_2 v + a_1 u^m,$$
$$v' = \psi_0 + \sqrt[m]{b_3}u + b_2 v + b_1 u^m. \qquad (19)$$

Введем параметр ε по формулам $u=\varepsilon^p U$, $v=\varepsilon^q V$, $t=t_0+\varepsilon^r\tau$, получим

$$mU^{m-1}\dot{U} = \left(\varphi_0 + \sqrt[n]{a_5}\right)\varepsilon^{r-pm} + a_2V\varepsilon^{r-pm+q} + a_1U^m\varepsilon^r,$$

$$\dot{V} = \psi_0\varepsilon^{r-q} + \sqrt[m]{b_3}U\varepsilon^{r-q+p} + b_2V\varepsilon^r + b_1U^m\varepsilon^{r-q+mp}.$$

Считая $p = 1, q = 0, r = m$, при $\varepsilon = 0$ имеем упрощенную систему

$$mU^{m-1}\dot{U} = \varphi_0 + \sqrt[n]{a_5} + a_2V,\ \dot{V} = 0,$$

для однозначности решений которой необходимо требовать, чтобы $\varphi_0 = 0$, $a_5 = 0$, $a_2 = 0$. При этих условиях система (19) не имеет подвижных критических особых точек.

Теорема 2. Для того чтобы система (1) обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $a_3 = 0$, $b_0 = \dfrac{b_2a_5}{a_4} - \left(\dfrac{a_5}{a_4}\right)'$, $b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$ или $b_4 = 0$, $a_0 = \dfrac{b_5a_1}{b_3} - \left(\dfrac{b_5}{b_3}\right)'$, $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$.

В работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых система (1) не имеет подвижных критических особых точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пецевич, В.М. Однозначные решения одной дифференциальной системы с линейной иррациональностью / В.М. Пецевич // Вестник ГрГУ, Сер. 2. – 2000. – № 2. – С. 11–15.

2. Мартынов, И.П. Об одной систем двух уравнений первого порядка и *n*-ой степени типа Пенлеве / И.П. Мартынов, В.М. Пецевич., В.А. Пронько // Вестник ГрГУ, Сер. 2. – 2004. – № 1. – С. 10–16.

THE PAINLEVE PROPERTY FOR THE FIRST ORDER SYSTEM OF TWO DIFFERENTIAL EQUATION OF N AND M DEGREE

E.E. KULESH, V.M. PECEVICH

Summary

The necessary and sufficient conditions Painleve property for the first order systems of differential equations.

Поступила в редакцию 10 мая 2009 г.