УДК 517.925

АСИНХРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЕМ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИНИЙ

А.К. ДЕМЕНЧУК
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск, Республика Беларусь

ВВЕДЕНИЕ

Изучение периодических решений периодических дифференциальных систем достаточно длительное время, вплоть до конца сороковых годов прошлого века, основывалось на гипотезе о соизмеримости периодов решения и системы. Ответ на вопрос о возможности существования решений, период которых несоизмерим с периодом изменения параметров самой системы или с периодом внешнего воздействия, считался отрицательным. По-видимому, первым, кто указал на ошибочность такой гипотезы, был Х.Массера. Он отметил, что утвердительный ответ долго казался невероятным, и, возможно поэтому проблема не изучалась.

В 1950 г. Х.Массера доказал, что периодические дифференциальные системы могут иметь периодические решения, период которых несоизмерим с периодом самой системы. Его работа [1] положила начало новому направлению качественной теории дифференциальных уравнений, которое получило дальнейшее развитие в исследованиях Я.Курцвейля и О.Вейводы [2], Н.П.Еругина [3], И.В.Гайшуна [4], Э.И.Грудо [5] и др. Впоследствии такие периодические решения и описываемые ими колебания, ввиду их необычности в сравнении с ранее изучавшимися, названы сильно нерегулярными [6].

Сложившееся в теории периодических дифференциальных уравнений и теории колебаний предположение, сначала о невозможности, а затем об исключительности сильно нерегулярных колебаний, отчасти было продиктовано схожей ситуацией в прикладных областях. В теории механических колебаний широко использовалось предположение о том, что поддерживаемые внешней гармонической силой колебания, всегда происходят с частотой этой силы или кратной ей. Одна из причин такого предположения – рассмотрение относительно простых макросистем, а также игнорирование целого ряда специфических эффектов (инерционных, термических и др.). Между тем еще в середине 30-х гг. прошлого века в исследованиях под руководством Л.И.Мандельштам и Н.Д.Папалекси изучалась возможность параметрического воздействия на двухконтурные параметрические системы не только на кратных, но и на несоизмеримых частотах [7]. В последнем случае возбуждение колебаний осуществлялось на частоте, несоизмеримой с частотой изменения параметров. Отсутствие в то время технических возможностей широкого использования этих явлений не стимулировало более глубокое их изучение как в теории колебаний, так и в теории дифференциальных уравнений. Практическое применение параметрический метод нашел гораздо позже, когда, в частности, были созданы параметрические полупроводники с управляемой емкостью.

К началу 70-х годов прошлого века в физике уже был известен ряд систем, преобразующих энергию источника высокочастотных колебаний в низкочастотные колебания, частота которых практически не зависит от частоты источника [8 – 10] и др. В таких системах реализуется задаваемое определенным образом воздействие на колебания, приводящее к периодическому вкладу энергии от внешнего гармонического источника с целью генерирования, усиления или преобразования колебаний. При этом колебательные процессы осуществляются на собственной частоте колебаний системы, в общем случае несоизмеримой с частотой внешней силы. Изменение времени пролета заряда через короткое пространство взаимодействия применяется в электронике. В [8] исследован случай, когда гармоническая сила, с которой поле конденсатора действует на пролетающий заряд, имеет частоту, несоизмеримую с частотой собственных колебаний заряда. При этом возможно установление устойчивых незатухающих колебаний на собственной частоте, т.е. сильно нерегулярных колебаний.

Осуществимость такого рода колебаний при переходе к макроскопическим массам была доказана в [9] на примере электромеханической колебательной системы, что нашло применение в ряде электротехнических устройств. В обзоре [10] показано, что некоторые неавтономные системы, а именно системы с высокочастотным источником энергии, могут вести себя как автоколебательные, характерной особенностью которых является независимость частотного спектра колебаний от спектра источника.

Условия протекания процесса, когда колебания системы описываются сильно нерегулярными решениями, в физике называются асинхронным режимом [8], [10] и др. Автоколебательные системы, функционирующие в асинхронном режиме, обладают рядом ценных для техники качеств: стабильность частоты и ее независимость от частоты источника, возможность плавной регулировки частоты. Это подчеркивает актуальность изучения таких систем и их использование в технических целях.

Асинхронные режимы присущи, в частности, линейным системам дифференциальных уравнений с возмущениями из различных классов функций. Такие уравнения являются результатом математического моделирования колебательных процессов, когда объект, описываемый стационарной системой, подвергается периодическим или квазипериодическим возмущениям. В работах [11 – 15] и др. для линейных систем с малыми периодическими и квазипериодическими возмущениями рассмотрен регулярный случай, когда периоды решения и возмущения совпадают. Нерегулярный периодический случай изучен в [16], [17] и др. В этих работах аспекты нерегулярной задачи с квазипериодическими возмущениями не затрагивались.

Объект, предмет и цель исследования. Будем рассматривать линейную дифференциальную систему с квазипериодическими возмущениями

$$\dot{x} = (A + \varepsilon B(t))x, \quad x \in R^n, \quad t \in R, \tag{1}$$

где A – постоянная (n×n) - матрица;
B(t) – квазипериодическая (n×n)- матрица с частотным базисом *L* и нулевым средним значением;
ε – вещественный параметр.

Определение. Периодическое с периодом Ω решение системы (1) называется сильно нерегулярным, если множество чисел $\{2\pi / \Omega\} \bigcup L$ рационально линейно независимо, т.е. любая их линейная комбинация с рациональными коэффициентами обращается в нуль только в случае тривиальных коэффициентов.

Цель настоящей работы – указать структуру и получить необходимые и достаточные условия существования сильно нерегулярных периодических решений системы (1) с нулевым средним значением квазипериодических возмущений.

Будем говорить, что некоторые столбцы матрицы *P(t)* линейно независимы над полем вещественных чисел, если линейные комбинации этих столбцов с вещественными коэффициентами тождественно обращаются в нуль, тогда и только тогда, когда все коэффициенты тривиальны. Пусть $\operatorname{rank}_{col} P$ – наибольшее число линейно независимых столбцов матрицы *P(t)*. В случае, когда *P(t)* – квазипериодическая с периодами $\omega_1, \ldots, \omega_l$, определим ее среднее значение

$$\hat{P} = \frac{1}{\omega_1 \cdots \omega_l} \int_0^{\omega_1} \cdots \int_0^{\omega_l} P(t_1, \ldots, t_l)\, dt_1 \cdots dt_l, \quad P_*(t) = P(t) - \hat{P}.$$

где $P(t_1, \ldots, t_l)$ – непрерывная функция l переменных, периодическая по $t_1, \ldots, t_l$ с периодами соответственно $\omega_1, \ldots, \omega_l$ и совпадающая на диагонали $t_1 = \ldots = t_l = t$ с функцией *P(t)*.

В таком случае множество частот квазипериодической матрицы *P(t)* имеет вид $L = \{2\pi / \omega_1, \ldots, 2\pi / \omega_l\}$

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

В дальнейшем будем предполагать, что среднее значение $\hat{B}$ квазипериодической с частотным базисом *L* матрицы возмущений *B(t)* равно нулю, а невозмущенная стационарная система описывает колебательные движения, т.е. матрица A имеет чисто мнимые собственные значения

$$\pm i\lambda \quad (i^2 = -1; \lambda \in R; n \geq 2k; \lambda_j / \omega_s \in R \setminus Q; \, j,s = 1,...,k) \tag{2}$$

С помощью линейного неособенного преобразования с постоянной невырожденной *(n×n)*-матрицей S_1

$$x = S_1 y \tag{3}$$

приведем систему (1) к виду

$$\dot{y} = [J + \varepsilon D_1(t)]y, \quad D_1(t) = S_1^{-1}B(t)S_1, \; J = S_1^{-1}AS_1 = \mathrm{diag}[\pm i\lambda_1,...,\pm i\lambda_k, A_1], \tag{4}$$

где A_1 – некоторая $(n-2k)\times(n-2k)$-матрица.

Согласно [5] система (4) имеет нерегулярные решения тогда и только тогда, когда эти решения удовлетворяют системе

$$\dot{y} = Jy, \quad D_*(t)y = 0, \quad D_*(t) = D(t) - \hat{D}. \tag{5}$$

Как видим, без предположения о наличии собственных чисел вида (2) у матрицы *A* как система (5), так и система (1) не могут иметь сильно нерегулярных периодических решений. Из [6] следует, что если все столбцы матрицы $D_*(t)$ линейно независимы, то искомые периодические решения у системы (1) отсутствуют. Пусть поэтому столбцовый ранг матрицы $D_*(t)$ равен $n–s$, $1<s<n$ Так как матрицы *B(t)* и *D(t)* связаны линейным невырожденым преобразованием, то они имеют одинаковое наибольшее число линейно независимых столбцов, т.е. $rank_{col}\, B = n\text{-}s$ При сделанном допущении согласно [6] найдется постоянная неособенная *(n×n)*-матрица Q_{D_*} такая, что замена переменных

$$y = Q_{D_*} z \tag{6}$$

преобразует (5) в систему

$$\dot{z} = Py, \quad L_*(t)z = 0, \quad P = Q_{D_*}^{-1} J Q_{D_*}, \tag{7}$$

где у матрицы $L_*(t) = DQ_{D_*}$ первые *s* столбцов нулевые, а остальные столбцы линейно независимы.

Из второй системы в (7) следует, что последние *n-s* компонент искомого периодического решения будут нулевыми, т.е. $z(t) = \mathrm{col}(z^{[s]},0,...,0), z^{[s]} = \mathrm{col}(z_1,...,z_s)$. Значит, в смысле существования сильно нерегулярных периодических решений система (7) эквивалентна системе

$$\dot{z}^{[s]} = P^{[s,s]}z^{[s]}, \quad P_{[n-s,s]}z^{[s]} = 0, \quad z_{[n-s]} = 0, \tag{8}$$

где $P^{[s,s]}, P_{[n-s,s]}$ – соответственно левый верхний и левый нижний блоки матрицы *P* (индексы указывают размерность блоков).

Предположим, что среди собственных чисел матрицы $P^{[s,s]}$ имеются числа

$$\pm i\mu_p \quad (\mu_p > 0, \quad p = \overline{1,m}, \; 2m \leq s; \, \mu_q / \mu_r \in Q, \quad q,r = \overline{1,m}) \tag{9}$$

такие, что для каждого $j=\overline{1,m}$ множество чисел $\{\mu_j\}\bigcup L$ рационально линейно независимо. Так как числа $\mu_j\,(j=\overline{1,m})$ попарно соизмеримы, то найдется сколь угодно много положительных чисел, отношения которых к μ_{j_p} являются натуральными числами. Обозначим через μ наименьшее из них. В силу (9) множество $\{\mu\}\bigcup L$ также рационально линейно независимо.

Первая система в (8) имеет семейство решений периода $\Omega = 2\pi/\mu$

$$z_0^{[s]}(t)=\sum_{p=1}^{m}(a_p\cos\mu_p t+b_p\sin\mu_p t), \tag{10}$$

базисная частота которого μ образует с L рационально линейно независимое множество, а коэффициенты a_p, b_p зависят от $2m$ произвольных постоянных. Для того, чтобы (10) являлось решением всей системы (8) должно выполняться тождество

$$P_{[n-s,s]}z_0^{[s]}(t)\equiv 0. \tag{11}$$

С учетом замен (3), (6) находим $2m$ -параметрическое семейство периодических решений системы (1)

$$x_0(t)=S_1Q_{D_*}\operatorname{col}[z_0^{[s]}(t),0,\dots,0], \tag{12}$$

базисная частота которого образует с частотным множеством правой части рационально линейно независимое множество чисел.

Таким образом, имеет место

Теорема. Пусть матрица A системы (1) имеет чисто мнимые собственные значения (2), матрица $B(t)$ является квазипериодической с нулевым средним значением и частотным множеством L. Тогда:

1. если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение, то оно задается тригонометрическим полиномом вида (12).
2. для того чтобы система (1) имела решение (12), необходимо и достаточно, чтобы столбцовый ранг матрицы $B_*(t)$ был равен n-s $(1<s<n)$, левый верхний блок размерности $s\times s$ матрицы $P=Q_{D_*}^{-1}S_1^{-1}AS_1Q_{D_*}$ имел собственные числа (9) и выполнялось тождество, (11).

Замечание 1. Поскольку колебания возмущенной системы (1) описываются сильно нерегулярным решением (12), то полученные условия реализуют асинхронный режим.

Замечание 2. Тождество (11) может выполняться за счет подходящего выбора входящих в (10) параметров. В этом случае решение (12) будет зависеть от меньшего, чем $2m$ числа параметров.

Замечание 3. В асинхронном режиме числа (9) будут принадлежать множеству (2), т.е. (9) будут одновременно собственными числами для матриц A и $P^{[s,s]}$.

ВЫВОДЫ

Проведенное иследование линейных дифференциальных систем показало, что для квазипериодических возмущений с нулевым средним значением асинхронный режим качественно подобен случаю одночастотных возмущений. Предположение тривиальности среднего значения усредненной матрицы возмущений обеспечивает независимость частот сильно нерегулярного периодического решения от параметра ε. Остается открытым вопрос ограниченности всех решений системы (1) с квазипериодическим возмущением для достаточно малых по абсолютной величине значений параметра.

Работа выполнена в Институте математики Национальной академии наук Беларуси при финансовой поддержке Белорусского республиканского Фонда фундаментальных исследований (грант №08-041).

ЛИТЕРАТУРА

1. Massera, J.L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J. L. Massera // Bol. de la Facultad de Ingenieria. – 1950. – V. 4, № 1. – P. 37–45.
2. Курцвейль, Я. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехосл. матем. журнал. – 1955. – Т. 5, № 3. – С. 362–370.
3. Еругин, Н.П. О периодических решениях дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин // Прикл. матем. и механика. – 1956. – Т. 20, вып. 1. – С. 148–152.
4. Гайшун, И.В. Уравнения в полных производных с периодическими коэффициентами / И.В. Гайшун // Докл. АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 8. –С. 684–686.
5. Грудо, Э.И. О периодических решениях с несоизмеримыми периодами периодических дифференциальных систем / И.Э. Грудо // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22, № 9. – С. 1499–1504.
6. Demenchuk, A.K. Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems / A.K. Demenchuk // Math. Bohemica. – 2001. – V. 126, № 1. – P. 221–228.
7. Папалекси, Н.Д. Об одном случае параметрически связанных симстем / Н.Д. Папалекси // Journ. of Phys. Acad. Sc. USSR. – 1939. – T.1. – С. 373–379.
8. Пеннер, Д.И. Колебания с саморегулирующимся временем взаимодействия / Д.И. Пеннер, Я.Б. Дубошинский, Д.Б. Дубошинский // ДАН СССР. – 1972. – Т. 204, № 5. – С. 1065–1066.
9. Пеннер, Д.И. Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний / Д.И. Пеннер, Д.Б. Дубошинский, М.И. Козаков // Успехи физич. наук. – 1973. – Т. 109, вып. 1. – С. 402–406.
10. Ланда, П.С. Автоколебательные системы с высокочастотными источниками энергии / П.С. Ланда, Я.Б. Дубошинский // Успехи физич. наук. – 1989. – Т. 158, вып. 4. – С. 729–742.
11. Еругин, Н.П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами / Н.П. Еругин. – Минск, 1963.
12. Чезари, Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных систем / Л. Чезари. – М., 1964. – 478 с.
13. Хейл, Дж. Колебания в нелинейных системах / Дж. Хейл. – М., 1966.
14. Штокало, И.З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами / И.З. Штокало. – Киев, 1969.
15. Якубович, В.А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В.А. Якубович, В.М. Старжинский. – М, 1972.
16. Деменчук, А.К. Об устойчивости некоторых классов решений линейных дифференциальных систем с малыми периодическими возмущениями /А.К. Деменчук // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 3. – С.307–310.
17. Деменчук, А.К. Нерегулярные периодические решения линейных дифференциальных систем с ненулевым средним значением малых периодических возмущений / А.К. Деменчук // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 10. – С. 1430–1432.

ANISOCHRONOUS OSCILLATIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH TRIVIAL AVERAGE VALUE OF QUASIPERIODIC PERTURBATIONS

A.K. DEMENCHUK

Summary

The existence coefficient conditions for periodic strongly irregular solutions are given for ordinary differential systems with trivial mean value of quasiperiodic perturbations.

Поступила в редакцию 11 мая 2009 г.