УДК 336.76.066/ 519.6.51–35/–37

МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ В ИНВЕРСИИ ВАЛЮТНОГО КУРСА И ФОНДОВОГО ИНДЕКСА[1]

И.В. КУЛАЛАЕВА

Марийский государственный университет
Институт экономики, управления и финансов,
г. Йошкар–Ола, республика Марий Эл, Российская Федерация

Введение. Стремление России к интеграции в мировое хозяйство предполагает её активное участие в международных валютно–финансовых и кредитных отношениях [1], обладание сбалансированным и открытым для нерезидентов внутренним рынком товаров, услуг, капитала, валют, отсутствием валютных ограничений, что, в свою очередь, невозможно без отлаженного механизма прогнозирования вероятности возникновения случайных событий, которые могут нарушить намеченные планы.

Методика и объекты исследования. Методы, основанные на легитимной научной теории привлекательны для целей прогнозирования различного рода событий, если известен достаточно длинный слабо детерминированный, чисто случайный, но независимый одномерный численный ряд.

Так, метод прогнозирования при помощи однородных цепей Маркова первого порядка базируется на предположении, что любая система может принимать какое–то одно из конечного числа определённых заранее состояний, и что эти состояния сменяют друг друга с течением времени [2].

Сама теория цепей Маркова переросла в огромную и очень важную область научных исследований – теорию Марковских случайных процессов, которая является основой общей теории стохастических процессов [3]. А. А. Марков [4, 5] внёс огромный вклад в области исследования закона больших чисел и центральной предельной теоремы теории вероятностей и распространил их на цепи Маркова, которые стали применимы и необходимы для физики, актуарной (страховой) математики, теории массового обслуживания, генетики, регулирования дорожного движения, теории электрических цепей, а также теории учёта и накопления товаров (броуновское движение [6] и его обобщения); теории случайных процессов, возникающих в статистике [7], теории деления атомного ядра, теории информации; теории связи, которая занимается изучением и созданием систем, передающих сообщения при наличии шума или случайных помех (стационарные процессы); при прогнозировании поведения экономических и финансовых процессов, природных явлений, изменение которых принято считать случайными.

Поэтому цепь Маркова – последовательность семейных случайных событий с конечным или счётным числом исходов, обычно зависящих от параметра (время), которая, в основном, предназначена, для полного описания как долговременного, так и локального поведения процесса, где при фиксированном «настоящем» «будущее» независимо от «прошлого», т. е. «будущее» процесса зависит от «прошлого» через «настоящее», что является Марковским свойством.

Пусть $\{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ – множество возможных состояний некоторой физической системы. В любой момент времени система может находиться только в одном состоянии. С течением времени она переходит последовательно из одного состояния в другое, переход называется шагом процесса.

Система называется *системой с дискретными состояниями*, если множество её состояний конечно, а переходы из одного состояния в другое осуществляются скачком, последовательность состояний называется *цепью*.

Простейшей характеристикой случайного процесса, являющегося цепью, служит набор вероятностей состояний $p_1(t),\ p_2(t), \dots ,\ p_n(t)$, где $p_i(t)$ – вероятность того, что в момент (t) система находится в состоянии (i).

[1] Исследования выполнены в рамках НИР № 6.8219.2013 по Госзаданию Минобрнадзора РФ на 2013-15 гг.

$$p_1(t) + p_2(t) + \dots + p_n(t) = 1 \qquad (1)$$

Вероятности $P_{ij}(n) = P(\xi_n = j \backslash \xi_{n-1} = i), i, j = 1,2, \dots, r$ – вероятности перехода из ния E_iв состояние E_jза один шаг, который зависит только от того, из какого состояния в какое осуществлялся переход.

Цепь Маркова называется однородной, если вероятности перехода $p_{ij}(n)$ не зависят от n, т.е. если вероятности перехода не зависят от номера шага, а зависят только от того, из какого состояния и в какое осуществляется переход. Для однородных цепей Маркова вместо $p_{ij}(n)$ будем писать p_{ij}.

Вероятности перехода удобно располагать в виде квадратной матрицы

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Матрица P называется матрицей вероятностей перехода однородной цепи Маркова за один шаг. Она обладает следующими свойствами:

а) $p_{ij} \geq 0$;

б) для всех i: $\sum_{j=1}^{r} p_{ij} = 1$.

Квадратные матрицы, для которых выполняются условия а) и б), называются стохастическими. Такая матрица строится следующим образом:

Исследуемый ряд ранжируется в возрастающем порядке и в нём выделяются группы по состояниям:

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \dots S_i \dots S_j \dots S_k, \qquad (3)$$

где k — число состояний процесса.

Далее подсчитывают частоты перехода от состояния к состоянию. Переход от состояния S_i к состоянию S_j — это событие S_{ij}, которое может совершиться (произойти) V_{ij} раз.

По каждой строке подсчитывают сумму переходов от состояния к состоянию и сумму строк, причём каждая последняя определяет общее число переходов, которое на единицу меньше количества членов в ряду n. Далее составляют матрицу переходных вероятностей P (2), в которой каждый элемент определяется как:

$$P_{ij} = \frac{V_{ij}}{V_{ik}}, \qquad (4)$$

V_{ij} — число переходов из состояния S_i в состояние S_j;
V_{ik} — число попаданий в состояние S_i;
i — количество строк,
j — количество столбцов,
n — количество строк, столбцов.

Вектор $\overline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)$, где $a_i = P(\xi_0 = i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ называется вектором начальных вероятностей. Свойства однородных цепей Маркова полностью определяются вектором начальных вероятностей и матрицей вероятностей перехода. Именно от них зависят прогнозы на будущие периоды, составленные при помощи математического аппарата цепей Маркова.

Основной особенностью Марковских процессов является зависимость его поведения только от непосредственного предшествующего состояния и независимость от всех остальных предшествующих состояний, а число состояний величина конечная.

Хотя Марковские процессы являются частным видом случайных процессов, т. к. функционирование многих объектов представляет собой последовательность переходов их из одного состояния в другое (ЭВМ, каналы передачи информации…), для них хорошо разработан математический аппарат, позволяющий решать многие практические задачи и описать поведение достаточно сложных систем, например: моделирование и выбор систем массового обслуживания (СМО), выбор стратегии управления социально–экономическими процессами, происходящими в обществе.

Объектом исследования выступает совокупность экономических и валютных отношений в условиях современной глобализации финансовой системы, оказывающих влияние на формирование и определение валютного курса и фондового индекса.

Результаты и их обсуждение. В настоящей работе в целях испытания работоспособности математического аппарата цепей Маркова исследовался временной ряд курса доллара США (за три года) и индекса ММВБ (за два года), представляющих независимые события в наиболее чистой форме.

Для упрощения процесса прогнозирования инверсии курса доллара США Центрального Банка Российской Федерации (ЦБ РФ) и индекса ММВБ за временной период с 01.01.2011 по 01.01.2013 [8, 9, 10] (1254 наблюдения) применялся Microsoft Excel, а также на языке программирования Visual Basic 2005 была написана программа, позволяющая произвести прогноз в автоматическом режиме использующая текстовый файл, в котором отражались курсы исследуемой валюты и индексы ММВБ на момент открытия или закрытия торгов на каждый из торговых дней за рассматриваемый временной период. При этом за временной шаг был выбран 1 день.

Для присвоения определённого состояния каждому из рассмотренных временных периодов, необходимо определить степень процентной инверсии валютного курса и индекса ММВБ в текущем периоде по отношению к прошлому периоду. Затем определить абсолютные и относительные показатели инверсии валютного курса и индекса к прошлому периоду, а также присвоить номер состояния к каждому из периодов.

Всю практическую часть можно разделить на этапы:

I. Прогнозирование инверсии валютного курса Доллара США ЦБ РФ посредством эргодических свойств теории однородных Марковских цепей.

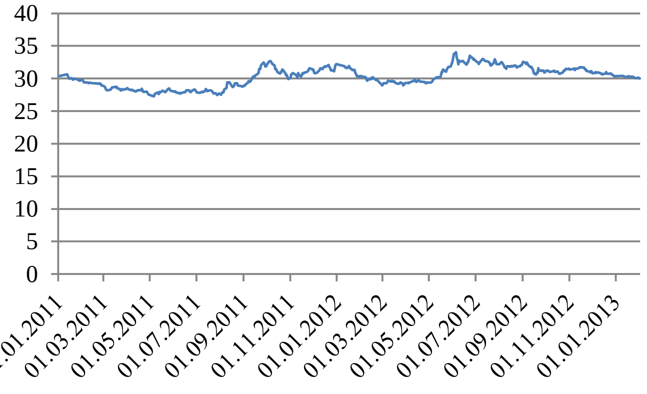

Рисунок 1 – Динамика волатильности курса Доллара США ЦБ РФ с 01.01.2011 по 01.01.2013

1. Калькулирование процентной инверсии курса USD.

28,2277	0,30%
28,3113	–0,34%
…	…

2. Декомпозиция курсов USD на состояния.

Анализируя многократно чередующиеся курсы USD в течение исследуемого периода, мы наблюдаем неоднократные переходы от низких курсов к высоким, последних к самым низким, к самым высоким или к средним и т.д. При практически бесконечном числе переходов от состояния к состоянию само число состояний конечно. В нашем случае число состояний равно шести:

Таблица 1 – Перечень состояний модели

Состояние S1	Курс упал в пределах от 1 % до 2%
Состояние S2	Курс упал в пределах от 0% до 1%
Состояние S3	Курс вырос в пределах от 0% до 1%
Состояние S4	Курс вырос в пределах от 1% до 2%
Состояние S5	Курс вырос в пределах от 2% до 3%
Состояние S6	Курс вырос в пределах от 3% до 4%

Таблица 2 – Распределение номеров состояния модели к каждому из периодов состояний

28,2277	0,30%	S3
28,3113	–0,34%	S2
…	…	…

За весь исследуемый период общее количество состояний составило 748 шт., их них состояние $S(1)$ наблюдалось 51 раз, состояние $S(2)$ – 327 раз, состояние $S(3)$ – 288 раз, состояние $S(4)$ – 54 раз, состояние $S(5)$ – 15 раза, состояние $S(6)$ – 13 раза.

3. Оценивание матрицы переходных вероятностей.

Для составления матрицы переходных вероятностей необходимо калькуляцию количества переходов состояний в другие состояния. Так как общее число состояний равно 6, то количество переходов равно 36.

Таблица 3 – Калькуляция количества переходов состояний в другие состояния

S1–> S1	8	S2–> S1	26	S3–> S1	15	S4–> S1	1	S5–> S1	6	S6–> S1	0
S1–> S2	29	S2–> S2	140	S3–> S2	123	S4–> S2	20	S5–> S2	9	S6–> S2	8
S1–> S3	11	S2–> S3	126	S3–> S3	118	S4–> S3	29	S5–> S3	0	S6–> S3	0
S1–> S4	0	S2–> S4	30	S3–> S4	16	S4–> S4	2	S5–> S4	0	S6–> S4	5
S1–> S5	3	S2–> S5	0	S3–> S5	5	S4–> S5	2	S5–> S5	0	S6–> S5	0
S1–> S6	0	S2–> S6	5	S3–> S6	11	S4–> S6	0	S5–> S6	0	S6–> S6	0

Следовательно, состояние $S(1)$ переходило в состояние $S(2)$ 29 раз, состояние $S(4)$ в состояние $S(5)$ 2 раза и т.д.

Полученные результаты калькулирования позволяют составить матрицу переходных вероятностей, из которой следует, что состояние $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$, $S(5)$ и $S(6)$ могут смениться состоянием $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$ и $S(6)$, а состояние $S(5)$ смениться состояниями $S(1)$ и $S(2)$ с соответствующими вероятностями перехода и т.д.

4. Векторное прогнозирование курса доллара США.

Для составления прогноза следует умножить полученную матрицу переходных вероятностей на вектор вероятностей начальных состояний.

Предположим, что сегодня курс доллара принадлежит состоянию $S(6)$, тогда вектор вероятностей начальных состояний примет вид: $X = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

Умножая вектор X на матрицу переходных вероятностей можно сделать вывод, что на следующий день вероятнее всего курс доллара перейдёт из состояния $S(6)$ в состояние $S(2)$ и в следующие четыре дня не изменит данного состояния.

Таблица 4 – Вероятности состояния на следующий день

день	S1	S2	S3	S4	S5	S6
1	0,0000	**0,6667**	0,0000	0,3333	0,0000	0,0000
2	0,0660	**0,4137**	0,4124	0,0842	0,0175	0,0061
3	0,0726	**0,4383**	0,3869	0,0733	0,0124	0,0165
4	0,0719	**0,4414**	0,3817	0,0771	0,0119	0,0159
5	0,0718	**0,4409**	0,3824	0,0771	0,0120	0,0158

Данный прогноз показал, что известный курс доллара уменьшится на следующие пять дней на 0–1%.

Следует отметить, что в настоящем виде метод прогнозирования курса доллара США на основе цепей Маркова не является в достаточной мере совершенным, а результаты вполне достоверными, так как данный метод на 45–50% рассчитывает правильный прогноз. Но даже в существующем виде этот метод несёт значительно больше информации по сравнению с простым статистическим анализом, когда мы можем определить лишь функцию распределения вероятностей исследуемого ряда и его параметры, например, среднее значение, среднее квадратическое отклонение, доверительные интервалы и плотность распределения.

II. Прогнозирование инверсии фондового индекса ММВБ посредством эргодических свойств теории однородных Марковских цепей.

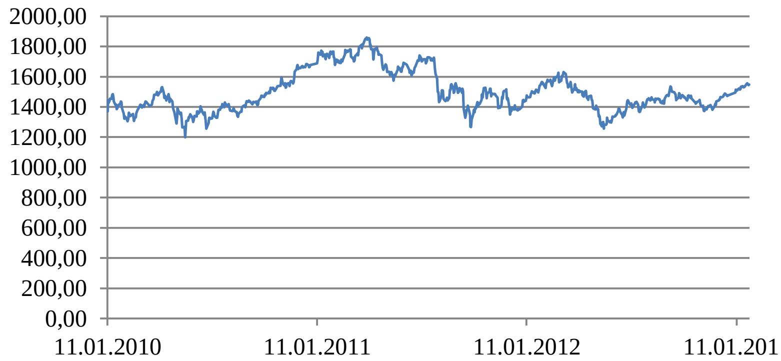

Рисунок 2 – Динамика волатильности индекса ММВБ ЦБ РФ с 01.01.2011 по 01.01.2013

1. Калькулирование процентной инверсии индекса ММВБ.

1809,83	1,56 %
1781,51	–0,06 %
…	…

2. Декомпозиция поведения индекса на состояния.

Анализируя многократно чередующиеся уровни индекса ММВБ в течение исследуемого периода, мы наблюдаем неоднократные переходы от низких уровней к высоким, последних к самым низким, к самым высоким или к средним и т.д. При практически бесконечном числе переходов от состояния к состоянию само число состояний конечно. В нашем случае число состояний равно шести:

Таблица 5 – Перечень состояний модели – поведение индекса

Состояние S1	Индекс упал более чем на 3%
Состояние S2	Индекс упал на величину от 1% до 3%
Состояние S3	Индекс упал на величину от 0% до 1%
Состояние S4	Индекс увеличился на величину от 0% до 1%
Состояние S5	Индекс увеличился на величину от 1% до 3%
Состояние S6	Индекс увеличился более чем на 3%

Таблица 6 – Распределение номеров состояния модели к каждому из периодов состояний

1809,83	1,56 %	S2
1781,51	–0,06 %	S3
…	…	…

За весь исследуемый период общее количество состояний составило 506 шт., их них состояние $S(1)$ происходило 36 раз, состояние $S(2)$ – 235 раз, состояние $S(3)$ – 198 раз, состояние $S(4)$ – 27 раз, состояние $S(5)$ – 5 раза, состояние $S(6)$ – 5 раза.

3. Оценивание матрицы переходных вероятностей.

Для составления матрицы переходных вероятностей необходимо калькуляцию количества переходов состояний в другие состояния. Так как общее число состояний равно 6, то количество переходов равно 36.

Полученные результаты калькулирования позволяют составить матрицу переходных вероятностей:

Таблица 7 – Матрица переходных вероятностей

		к состоянию					
		S1	S2	S3	S4	S5	S6
от состояния	S1	0,1429	0,0714	0,2857	0,2143	0,2857	0
	S2	0,0465	0,2791	0,093	0,2791	0,2791	0,0233
	S3	0,0857	0,1714	0,2857	0,2429	0,1857	0,0429
	S4	0,0323	0,1452	0,2419	0,2091	0,3387	0,0161
	S5	0,0345	0,1207	0,4483	0,2241	0,1207	0,0517
	S6	0	0,125	0,25	0,5	0,125	0

Как видим, состояние $S(1)$ может смениться состоянием $S(1)$ с вероятностью перехода 0.1429, состоянием $S(2)$ с вероятностью 0.0714, состоянием $S(3)$ с вероятностью 0.2857, состоянием $S(4)$ с вероятностью 0.2143, состоянием $S(5)$ с вероятностью 0.2857, но ни в коем случае состоянием $S(6)$. Состояние $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$ может смениться состоянием $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$, $S(5)$ и $S(6)$, а состояние $S(6)$ может смениться только состояниями $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$ и $S(5)$ с соответствующими вероятностями перехода и т.д.

4. Векторное прогнозирование вероятностей состояния рынка и их влияние на инверсию индекса ММВБ.

Для составления прогноза следует умножить полученную матрицу переходных вероятностей на вектор вероятностей начальных состояний.

Предположим, что сегодня курс доллара принадлежит состоянию $S(6)$, тогда вектор вероятностей начальных состояний примет вид: $X = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Умножая вектор X на матрицу переходных вероятностей можно сделать вывод, что на следующий день вероятнее всего показатель индекса перейдёт из состояния $S(6)$ в состояние $S(3)$ и в следующие четыре дня не изменит данного состояния. Хотя при этом наиболее вероятными событиями является переход показателя индекса из состояния S6 в состояние $S(3)$, $S(4)$, $S(5)$.

Данный прогноз показал, что известный показатель индекса ММВБ уменьшится на следующие пять дней на 0–1%. Надёжность построенных прогнозов состояний курса доллара США ЦБ РФ и индекса ММВБ составляет порядка 50%, что является достаточно хорошим результатом для модели из 6 состояний.

Выводы. К сожалению, свойства эргодичности Марковских цепей не позволяют при прогнозировании учитывать различные макроэкономические показатели, влияющие на динамику и волатильность валютных курсов, фондовых индексов; не определяют конкретной величины их состояний, а только предполагают, в каком направлении и с какими границами изменятся их прогнозы. Этот процесс не рассматривает систему в комплексе, основываясь на текущих состояниях исследуемых процессов, что может повлиять на точность результата прогнозирования и определение уровня дивергенции и конвергенции.

Следовательно, данный метод не стоит использовать как основной и единственный при реальной работе с валютным и фондовым рынками. Но ввиду простоты его осуществления и математической обоснованности, он может быть полезен для рыночных аналитиков, если они будут использовать его в качестве дополнительного инструмента для анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдокушин, Е.Ф. Международные экономические отношения / Е.Ф. Авдокушин. – М.: Юрист, 2001. – 304 с.
2. Андреев, В.Н. Эти замечательные цепи / В.Н. Андреев. – М.: Знание, 1987. – 190 с.
3. Ван Кампен, Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии / Н.Г Ван Кампен.– М.: Огни, 2000. – 789 с.
4. Гродзенский, С. Я. Андрей Андреевич Марков / С.Я. Гродзенский. – М.: Наука, 1987.
5. Математическая энциклопедия : гл. ред. И.М. Виноградов. Т. 3 Коо–Од–М.: Советская энциклопедия; 1982.–1184стб., ил.
6. Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона: В 86 томах (82 т. и 4 доп.). – СПб., 1890–1907. http://ru.wikisource.org/wiki/
7. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман.– М.: Высшая школа, 2008. – 478 с.
8. Новости и аналитика рынка валют Forex / Форекс, фондовых и сырьевых рынков на [Электронный ресурс] Информационный ресурс компании Pro Finance Service, Inc на рынке Форекс. – М.: с 1995 – 2011. – Режим доступа: http://www.forexpf.ru/currency_usd.asp свободный.
9. Центральный банк Российской Федерации [Электронный ресурс] Информационно аналитический ресурс Банка России. – М.: ЦБ, 2000–2012. – Режим доступа : http://www.cbr.ru свободный.
10. Московская биржа [Электронный ресурс] Информационно аналитический ресурс Московской биржи. – М.: ММВБ, 2011–2013. – Режим доступа : http://www.micex.ru свободный.

MARKOV CHAINS IN THE INVERSION OF EXCHANGE RATE AND STOCK INDEX

I.V. KULALAEVA

Summary

The article defines the properties of Markov chains as a method of vector prediction, optimization and variational calculus inversion of the exchange rate and stock index (degree of interest inversion study data in the current period compared to the previous one, their absolute and relative to the previous period, number of state to each period).

Keywords: inversion, exchange rate, stock index, Markov chain.

Поступила в редакцию 02 апреля 2013г.