УДК 069.64

DWUMIANOWY MODEL WYCENY OPCJI FINANSOWEJ

K. PERA
Wyższa Szkoła Bankowości i Finansów, Akademia Ekonomiczna,
Katowice, Polska, pera@ae.katowice.pl

WSTEP

Inwestowanie na rynku kapitałowym realizuje się w warunkach ryzyka bądź niepewności. Inwestorzy w zależności od ich indywidualnego stosunku do ryzyka mają na rynku do dyspozycji instrumenty finansowe, które dają alternatywnie możliwość celowego zwiększania ryzyka dla osiągnięcia ponadproporcjonalnej stopy zwrotu lub ograniczania ryzyka dla zwiększenia bezpieczeństwa finansowego portfela.

Transfer ryzyka na rynku finansowym odbywa się przy pomocy określonych instrumentów finansowych. Do najważniejszych z nich należy zaliczyć: kontrakty finansowe, opcje i swapy. Przedmiotem niniejszego opracowania są finansowe opcje jako instrument rynku terminowego futures. Analiza dotyczy zwłaszcza wyceny opcji według modelu zaproponowanego przez autorów: J.C. Cox'a, S.A. Ross'a oraz M. Rubinstein'a. Model ten traktuje zmiany wartości aktywa bazowego, na który została wystawiona opcja jako zmienną dyskretną, która w jednym podokresie analizy może jeden raz zmienić swą wartość, a zatem można dla tej zmiennej dyskretnej skonstruować model dwumianowy, który przy przyjęciu niżej opisanych założeń pozwala oszacować bieżącą wartość opcji. Alternatywnym (nieporuszonym w niniejszym opracowaniu) modelem wyceny opcji jest model Blacka-Scholes'a, który w odróżnieniu od modelu dwumianowego zmiany ceny aktywa bazowego traktuje jak zmienne ciagłe, co oznacza, że wartość aktywa bazowego może zmieniać się nieskończenie często i o dowolna wartość.

Umiejętność oszacowanie wartości opcji jest także jednym z podstawowych zadań banku komercyjnego, ponieważ to właśnie banki są instytucjami, które dla ochrony finansowych zasobów są szczególnie zainteresowane zabezpieczającymi instrumentami finansowymi, dającym im swobodę aktywności na rynku kapitałowym przy jednoczesnym ograniczonym ryzyku inwestycyjnym.

1. ISTOTA OPCJI FINANSOWEJ

Opcja jest terminową transakcją warunkową, w której jedna ze stron nabywa prawo, ale nie obowiązek, realizacji umowy. Opcja jest instrumentem, który daje jego właścicielowi prawo do zakupu lub sprzedaży innego instrumentu. Opcja kupna daje jej właścicielowi prawo zakupu instrumentu bazowego (którego dotyczy) w określonym terminie po określonej cenie (zwaną ceną wykonania).

Wyróżniamy dwa podstawowe rodzaje opcji:
– opcje kupna (call option);
– opcję sprzedaży (put option).

Kupujący opcję kupna ma prawo do kupna określonej ilości instrumentu podstawowego (np. akcji) po z góry określonej cenie i w określonym w umowie terminie. W zamian za to prawo musi zapłacić wystawcy opcji odpowiednią gratyfikację, zwaną premią. Kupujący zrealizuje opcję wtedy, gdy kurs rynkowy aktywa bazowego w dniu wykonania opcji będzie wyższy niż cena wykonania. W związku z tym kupno opcji call chroni przed wzrostem kursu instrumentu bazowego. Wystawca opcji kupna zobowiązany jest do sprzedaży przedmiotu kontraktu po cenie wykonania, o ile kupujący zechce zrealizować swoje prawo do kupna. Ewentualny zarobek wystawcy opcji sprowadza się tylko do premii otrzymanej od kupującego.

Kupujący opcję sprzedaży nabywa prawo do sprzedaży określonej ilości instrumentu podstawowego po z góry określonej cenie i w określonym w umowie czasie. Podobnie, jak przy kupnie opcji call, płaci za to prawo cenę w postaci premii. Realizacja opcji jest dla niego opłacalna, gdy w dniu wykonania kurs wykonania opcji będzie wyższy niż kurs rynkowy instrumentu bazowego. Nabycie opcji put zabezpiecza przed spadkiem ceny instrumentu bazowego. Wystawca opcji put zobowiązany jest do nabycia przedmiotu kontraktu. Jego zarobek sprowadza się tylko do otrzymanej premii.

Opcje są instrumentem o niesymetrycznym rozłożeniu ryzyka. Wystawienie opcji wiąże się z o wiele wyższym ryzykiem niż jej kupno. Strata kupującego ogranicza się jedynie do zapłaconej premii. Potencjalne straty wystawcy opcji, jeśli te z kolei nie są zabezpieczone lub pokryte, mogą być nieograniczone.

Bez względu na typ opcji (call czy put) najważniejszym problem jest ich wycena. Inwestor każdorazowo chciałby wiedzieć jaka jest bieżąca wartość instrumentu, który uprawnia go do pewnych decyzji finansowych w przyszłości. Każdorazowo należy zatem odpowiedzieć na pytanie ile to prawo posiada wartości w bieżącym momencie. Na to pytanie odpowiadają modele wyceny opcji.

2. WYCENA OPCJI WEDŁUG MODELU DWUMIANOWEGO ZAŁOŻENIE WYJŚCIOWE

Wycenie podlega europejska opcja kupna akcji, która w okresie ważności opcji nie płaci dywidendy. Założenia podstawowe:

- inwestor posiada akcje i dla zrównoważenia ryzyka wystawia opcje kupna;
- brak możliwości dokonywania korzystnych transakcji arbitrażowych;
- cena akcji zachowuje się zgodnie z modelem dwumianowym.

Zakładamy, że w każdym podokresie całego okresu analizy walor bazowy może przyjąć alternatywnie tylko jedną z dwóch wartości:

- z poziomu S wzrosnąć do Us;
- z poziomu S spaść do poziomu dS.

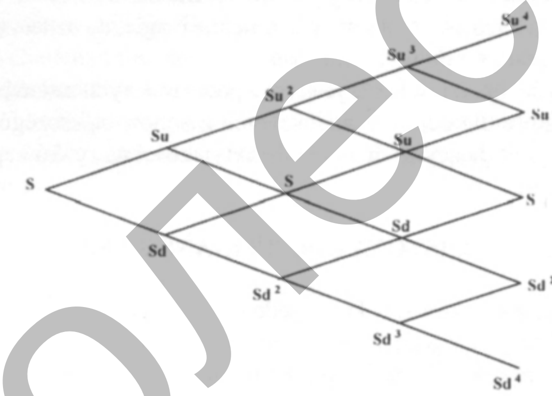
2.2. MODEL JEDNOOKRESOWY DLA EUROPEJSKIEJ OPCJI KUPNA

Jeśli para instrumentów: bazowy i opcja mogą być tak dobrane, że zmiana ceny jednego będzie powodować przeciwstawną zmianę ceny drugiego, to został skonstruowany portfel bezpieczny. Jeśli tak, to rentowność takiego portfela powinna odpowiadać stopie zwrotu wolnej od ryzyka.

Strategia inwestora jest w takim przypadku następująca:

- posiadacz instrumentów bazowych zabezpiecza się wystawieniem opcji, tak by koszty lub przychody tego zabezpieczenia niwelowały zyski lub straty na instrumentach bazowych;
- taki portfel daje stopę zwrotu równą r_w.

Zadaniem inwestora jest dobranie odpowiedniej ilości opcji do posiadanych akcji. Powstaje w ten sposób struktura zależności, które ze względu na dwa możliwe stany w każdym podokresie nazywamy drzewem dwumianowym:



Rys. 1. Struktura drzewa dwumianowego dla opcji

Zależności w drzewie wartości opcji i instrumentu bazowego są następujące:

- $u > 1$ oraz $d=1/u$ np. $u=1{,}25$ to $d=1/1{,}25=0{,}8$; $ud=1$
- $u > (1+r_w)$
- $udS = S$ $u^2dS = uudS = uS$ itd.

Parametry wzrostu i spadku ceny aktywa bazowego można oszacować z zależności:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta T}} \tag{1}$$

$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta T}} \tag{2}$$

gdzie:
σ – odchylenie standardowe ceny instrumentu bazowego,
ΔT – liczba podokresów pozostałych do terminu wygaśnięcia opcji

Następnie należy skonstruować portfel o składnikach:

- pozycja długa w Δ akcjach,
- pozycja krótka w opcjach kupna wystawionych na 1 akcję.

Zachodzi relacja:

$$\frac{V_1}{V_0} = (1+r_f) \quad \frac{V_1 - V_0}{V_0} = r_f \,, \tag{3}$$

gdzie:
V_0 – początkowa wartość portfela,
V_1 – wartość portfela po jednym okresie,
r_f – stopa zwrotu instrumentów wolnych od ryzyka.

To z kolei jest równoważne zapisowi:

$$\frac{\Delta S_1 - C_1}{\Delta S_0 - C_0} = (1+r_f)\,, \tag{4}$$

gdzie:
ΔS – wartość delta sztuk akcji (aktywa bazowego),
C – wartość opcji,
0 i 1 odpowiednio moment wystawienia i wyceny opcji,
r_f – stopa zwrotu wolna od ryzyka.

Mianownik w powyższym wzorze oznacza nakład na stworzenie portfela. Jest on równy wartości zakupu Δ akcji minus przychód z tytułu premii za wystawioną opcję.

Jeżeli cena akcji w okresie ważności opcji może wzrosnąć do wartości *uS* lub spaść do poziomu *dS* to odpowiednio cena opcji może wzrosnąć do wartości *uC* lub spaść do poziomu *dC* Taki portfel powinien być wolny od ryzyka, czyli jego wartość jest taka sama niezależnie od zmiany ceny akcji.

Końcowa wartość portfela:

$$\Delta uS - uC = \Delta dS - dC \tag{5}$$

czyli:

$$\Delta = \frac{uC - dC}{uS - dS} \tag{6}$$

Uogólniając otrzymujemy:

$$\frac{\Delta uS - uC}{1+r} = \frac{\Delta dS - dC}{1+r} \tag{7}$$

Ponadto w czasie zachodzi relacja: koszt skonstruowania portfela (ΔS-C) jest równy zdyskontowanej przyszłej wartości portfela czyli po roku:

$$\Delta S - C = \frac{\Delta uS - uC}{(1+r)} = \frac{\Delta dS - dC}{(1+r)} \tag{8}$$

Poszukiwana wartość opcji może być po przekształceniu tego wzoru wyliczona jako:

$$C = \Delta S - \frac{\Delta uS - uC}{(1+r)} = \Delta S - \frac{\Delta dS - dC}{(1+r)} \tag{9}$$

Prawdziwość tej relacji pozwala obliczyć bieżącą wartość opcji. Jednak nie wiemy z jakim prawdopodobieństwem nastąpi wzrost ceny akcji a z jakim spadek ceny akcji. Wyliczamy to podstawiając zamiast Δ akcji wzór na Δ.

$$\Delta = \frac{uC - dC}{uS - dS} \tag{10}$$

to zachodzi:

$$\left(\frac{uC - dC}{uS - dS}\right) S - C = \frac{\left(\frac{uC - dC}{uS - dS}\right) uS - uC}{(1+r)} = \frac{\left(\frac{uC - dC}{uS - dS}\right) dS - dC}{(1+r)} \tag{11}$$

z tego wyliczamy C bieżące jako:

$$C = \frac{1}{1+r}\left(\frac{(1+r) - d}{u-d} uC + \frac{u - (1+r)}{u-d} dC\right) \tag{12}$$

Podstawiając dla uproszczenia zapisu:

$\frac{(1+r) - d}{u-d} = p$ i jest prawdopodobieństwem wzrostu kursu akcji oraz

$\frac{u - (1+r)}{u-d} = (1-p)$ jest prawdopodobieństwem spadku kursów akcji, zatem cena bieżąca opcji kupna ma uproszczoną postać jako:

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left[puC + (1-p)dC\right] \tag{13}$$

To jest postać w przypadku jednokrotnej kapitalizacji w jednym okresie. Jeżeli zaś kapitalizacja byłaby ciągła zamiast $(1+r)^{-t}$ dyskonto ma postać e^{-rt} (Przejście w procedurze dyskonta do podstawy logarytmu naturalnego jest związane z zamianą kapitalizacji dyskretnej na kapitalizacje ciągła. Zwiększanie częstotliwości okresów kapitalizacji powoduje, że zastosowanie ma wzór: $(1+\frac{r}{n})^{nt}$ Jeżeli częstotliwość jest ciągła ($n \to \infty$) wówczas granica: $\lim(1+\frac{1}{n})^{n} = e$ Z tego w procesie dyskontowania wyrażenie $(1+r)^{-t}$ zamieniamy zapisem e^{-rt}, gdzie t jest zawsze wyrażone w latach lub ułamkach roku).

Uwzględniając ciągła kapitalizację wzór na bieżącą cenę opcji w okresie 1 roku ma postać:

$$C = e^{-rt}\left(puC + (1-p)dC\right) = e^{-rt}\left(\frac{e^{rt}-d}{u-d}uC + \frac{u-e^{rt}}{u-d}dC\right) \tag{14}$$

ponieważ

$$p = \frac{e^{rt}-d}{u-d} \quad (1-p) = \frac{u-e^{rt}}{u-d} \tag{15}$$

Jeżeli liczba okresów życia opcji jest większa niż jeden wówczas proces wyceny jest podobny co do istoty i polega na kolejnych krokach wstecz licząc od momentu wygaśnięcia opcji do okresu bieżącego. Dla liczby T okresów przy ciągłej kapitalizacji cena opcji C wyraża się wzorem:

$$C = e^{-rT}\sum_{t=0}^{T}\left(\frac{T!}{T!(T-t)!}p^{t}(1-p)^{T-t}\max\{0; u^{t}d^{T-t}S - X\}\right), \tag{16}$$

gdzie:

T – liczba okresów życia opcji

t – liczba okresów pozostałych do wygaśnięcia opcji.

2.3. PRZYKŁAD WYCENY JEDNOOKRESOWEJ EUROPEJSKIEJ OPCJI KUPNA

Dane:

Cena bieżąca akcji S = 20 zł;

Współczynnik wzrostu ceny akcji u = 1,1;

Współczynnik spadku ceny akcji d = 1/u = 0,9;

Cena wykonania opcji X= 21 zł;

stopa dyskonta = 5%

Jeżeli cena wzrośnie o 1,1 to uS wynosi 22 (20*1,1 = 22), a dS = 18 (20*0,9 = 18)

$$C_u = \{(uS - X);0\} = 1$$

$$C_d = \{(dS - X);0\} = 0$$

$uC =$ 1zł ponieważ (uS – X) → (22 – 21) → 1

$dC =$ 0zł bo (18 – 21) → 0 zł

Na tej podstawie wyliczamy ilość akcji Δ:

$$\Delta uS - uC = \Delta dS - dC$$

$$\Delta uS - \Delta dS = uC - dC$$

$$\Delta(uS - dS) = uC - dC$$

$$\Delta = \frac{uC - dC}{uS - dS}$$

Trzeba kupić Δ akcji i wystawić 1 opcję na tę akcję wówczas portfel jest bez ryzyka.

$\Delta * 22 - 1 = \Delta * 18 - 0$
$\Delta * 22 - \Delta * 18 = 1$
$\Delta * 4 = 1$
$\Delta = 0{,}25 \rightarrow$ na każdą 1 wystawioną opcję kupna trzeba nabyć 0,25 akcji.
Wartość portfela na koniec okresu gdy cena wzrośnie powinna być taka sama jak wartość portfela gdy cena spadnie, czyli:
$0{,}25 * 22 - 1 = 4{,}5$ przy wzroście ceny instrumentu bazowego,
$0{,}25 * 18 - 0 = 4{,}5$ przy spadku ceny instrumentu bazowego.
Jest to w związku z tym portfel wolny od ryzyka, który może być podstawą wyceny opcji.

W końcu bieżąca wartość portfela wynosi:

$$\frac{4.5}{(1+r)^1} = \frac{4.5}{1{,}05} - 4{,}29$$

Z tego z kolei poszukiwana wartość opcji wyliczona ze wzoru (9) wynosi:

$$C = 0{,}25 \cdot 20 - \frac{0.25 \cdot 22 - 1}{1 + 0{,}05} = 5 - 4{,}29 = 0{,}71 zł$$

lub równoważnie z tego samego wzoru:

$$C = 0{,}25 \cdot 20 - \frac{0.25 \cdot 18 - 0}{1 + 0{,}05} = 5 - 4{,}29 = 0{,}71\ zł$$

Alternatywnym sposobem jest obliczenie prawdopodobieństwo wzrostu i spadku ceny instrumentu bazowego a następnie wartość opcji jako średnia ważona jej końcowej ceny wzrostowej i końcowej ceny spadkowej, korzystając ze wzorów (12) i (13):

$$p = \frac{(1 + 0{,}05) - 0{,}9}{1{,}1 - 0{,}9} = 0{,}75 \quad (1 - p) = 0{,}25$$

Wartość opcji zgodnie z podstawowym wzorem tego modelu wyceny wynosi zatem:

$$C = \frac{1}{(1+r)}[puC + (1-p)dC] = \frac{1}{1+0{,}05}[0{,}75 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 0] = \frac{0{,}75}{1{,}05} = 0{,}71\ zł$$

W każdym przypadku wartość uzyskanego wyniku jest identyczna. Dla zadanych wartości wyjściowych warto kupić opcję kupna, jeśli jej cena bieżąca nie jest wyższa niż 71 groszy.

2.3. PODSUMOWANIE

Zaprezentowany model wyceny opcji jest obok modelu Blacka-Scholesa najczęściej stosowaną metodą wyceny opcji. Założenia tego modelu są dość mocno rygorystyczne. Warto wspomnieć chociażby zakładaną zależność: u=1/d, czy arbitralne dzielenie okresu życia opcji na określoną liczbę podokresów (z reguły małą) w których aktywo bazowe może przyjąć alternatywnie jedną dwóch wielkości.

Istnienie tych ograniczeń nie deprecjonuje jednak wartości modelu. Trzeba bowiem mieć każdorazowo na uwadze, że wycena opcji dotyczy rynków przyszłości, a te z natury rzeczy są dla okresów bieżących charakteryzowane wartościami probabilistycznymi lub wręcz niepewnymi. Trudno w związku z tym oczekiwać, że jakikolwiek model rynku kapitałowego odczyta w pełni jego przyszły stan. Warto na koniec zauważyć, że gdyby taki model powstał to kategoria opcji i rynku futures przestałaby mieć rację bytu ze względu na determinizm stanów przyszłych, co przecież nie odpowiada rzeczywistości. Funkcjonowanie rynków finansowych jest bogatsze od dyspozycyjnych metod ich modelowego określania.

LITERATURA

1. Dębski, W. Rynek finansowy i jego mechanizmy / W. Dębski. – PWN, Warszawa 2002.
2. Dziawgo, E. Modele kontraktów opcyjnych / E. Dziawgo. – Wyd. Uniwersytetu im. M. Kopernika w Toruniu, 2003.
3. Francis, J.C. Podstawy inwestowania: wycena papierów wartościowych i konstrukcja portfela / J.C. Francis, R.W. Taylor. – Oficyna Ekonomiczna, Kraków, 2001.
4. Sopoćko, A. Rynkowe instrumenty finansowe / A. Sopoćko. – PWN, Warszawa, 2005.

DOUBLE-TYPE MODEL OF THE ESTIMATION OF THE FINANCIAL OPTION

K. PERA

Summary

The results of studying the double-type model of the estimation of the capital market financial option are given in the article. It has been established that functions of the financial market regulation are more extensive than the existing methods of its modeling.

Поступила в редакцию 10 марта 2008 г.